Hong Kong Mathematics Olympiad (2010 / 2011)
Heat Event (Group)
香港數學競賽 (2010 / 2011)
初賽項目(團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 若 $(1000-a)(1000-b)(1000-c)(1000-d)(1000-e)=24^2$，其中 a、b、c、d 及 e 為偶數，且 $a>b>c>d>e$，求 a, b, c, d 及 e 的值。
If $(1000-a)(1000-b)(1000-c)(1000-d)(1000-e)=24^2$, where a, b, c, d and e are even numbers and $a>b>c>d>e$, find the values of a, b, c, d and e.

2. 以 $\overline{ab}$ 表示一個兩位數，其十位是 a，個位是 b，且 $R_{\overline{ab}}$ 表示 $\overline{ab}$ 除以 $a+b$ 的餘數。求 $R_{\overline{ab}}$ 的最大值。
$\overline{ab}$ denotes a two-digit number with a as the tens digit and b as the unit digit. $R_{\overline{ab}}$ is the remainder when $\overline{ab}$ is divided by $a+b$. Find the maximum value of $R_{\overline{ab}}$.

3. 已知 a、b、c 為整數，且 $a+b=2011$，$c-a=2010$，$a<b$。求 $a+b+c$ 的可能最大值。
Given that a, b and c are integers, and $a+b=2011$, $c-a=2010$, $a<b$. Find the greatest possible value of $a+b+c$.

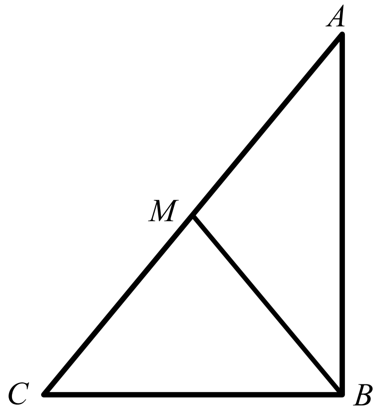
4. 已知 n 為一正整數，且 n^4-18n^2+49 為一質數。求 n 的值。
Given that n is a positive integer and n^4-18n^2+49 is a prime number, find the value of n.

5. 已知 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，其中 x 是實數。
求 $f\left(\dfrac{1}{2011}\right)+f\left(\dfrac{2}{2011}\right)+f\left(\dfrac{3}{2011}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2009}{2011}\right)+f\left(\dfrac{2010}{2011}\right)$ 的值。

Given that $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, where x is a real number, find the value of
$$f\left(\frac{1}{2011}\right)+f\left(\frac{2}{2011}\right)+f\left(\frac{3}{2011}\right)+\cdots+f\left(\frac{2009}{2011}\right)+f\left(\frac{2010}{2011}\right).$$

6. 如圖一，M 為 AC 上的一點，$AM=MC=BM=3$ 。求 $AB+BC$ 的最大值。

In Figure 1, M is a point on AC, $AM=MC=BM=3$. Find the maximum value of $AB+BC$.



圖一
Figure 1

7. 已知 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$ 且 $\dfrac{2011!}{10^k}$ 是整數，其中 k 是正整數。若 S 是 k 的所有可能值之和，求 S 的值。

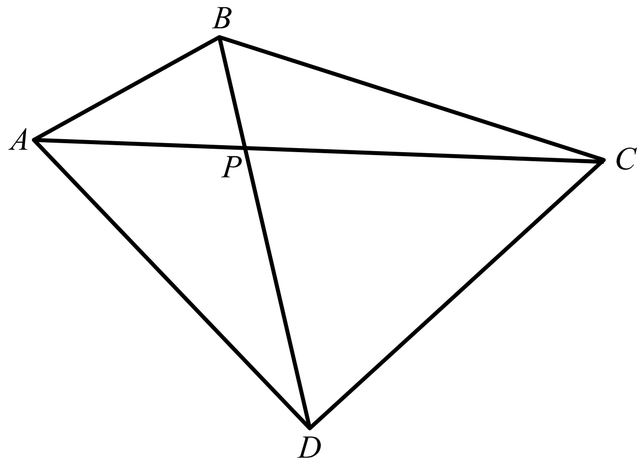
Given that $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$ and $\dfrac{2011!}{10^k}$ is an integer, where k is a positive integer. If S is the sum of all possible values of k, find the value of S.

8. 已知 a、b、c 及 d 為非負整數，且 $ac+bd+ad+bc=2011$。求 $a+b+c+d$ 的值。

Given that a, b, c and d are non-negative integers and $ac+bd+ad+bc=2011$. Find the value of $a+b+c+d$.

9. 如圖二，$ABCD$ 為一凸四邊形，$\angle BAC = 27^\circ$，$\angle BCA = 18^\circ$，$\angle BDC = 54^\circ$，$\angle BDA = 36^\circ$，且四邊形的對角線 AC 、 BD 相交於 P 。求 $\angle CPB$ 。

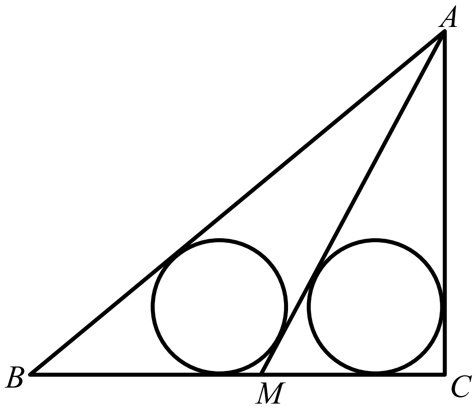
In Figure 2, $ABCD$ is a convex quadrilateral, $\angle BAC = 27^\circ$, $\angle BCA = 18^\circ$, $\angle BDC = 54^\circ$, $\angle BDA = 36^\circ$. The diagonals AC and BD intersect at P. Find $\angle CPB$.



圖二
Figure 2

10. 如圖三，$AC = 3$，$BC = 4$ 及 $\angle C = 90^\circ$。M 是 BC 上的一點使得 ΔABM 及 ΔACM 的內切圓相等。求 AM 的長。

In Figure 3, $AC = 3$, $BC = 4$ and $\angle C = 90^\circ$. M is a point on BC such that the incircles in ΔABM and ΔACM are equal. Find the length of AM .



圖三
Figure 3